Exercice 1

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}
Dans un pays , il y a 2% de la population contaminée par virus
On dispose d'un dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

— La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$
— La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$.

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population
On note l'évènement V " la personne est contaminée par le virus " et T l'évènement " le test est positif " .

1. a) Préciser les valeurs des probbilités p(V) , p(T/V) puis p($\overline{T}/\overline{V}$).
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités
   b) En déduire la probbilité del'évènement V∩T .
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est $0,0492$
3. a) Justifier par un calcul la phrase : "Si le test est positif , il n'a qu'environ 40% de chances que la personne soit contaminée "
   b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contminée par le virus sachant que son test est négatif .
4. On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard , on considère que les tirages sont indépendants .
   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par virus parmi ces 10 personnes .
   Justifier que X suit une loi binomiale dont donnera les paramètres .
5. Calculer la probabilié qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10 .

Exercice 2

Une étude statistique montre que dans une ville donnée 15% des individus âgés de moins de 60 ans et 80% des individus âgés de plus de 60 ans on été vaccinés contre la grippe .
Les individus âgés de plus de 60 ans représentent 30% de la population de cette ville .
On choisit , au hasard , une personne de cette population et on consiè les évènements suivants :

— G : $\ll$ La personne est âgée de plus de 60 ans $\gg$
— V : $\ll$ La personne est vaccinée $\gg$.

1. Réaliser un arbre pondéré et indiquer les probabilités sur les branches
2. Montrer que la probabilité pour q'une personne soit vaccinée est égale $0,345$
3. La personne choisie étant vaccinée , quelle est la probabilité pour qu'elle soit âgée de moins de 60 ans
4. On choisit au hasard 10 personnes âgées de plus de 60 ans . calculer la probabilité pour que deux exactement d'entre elles soient vaaccinées .
5. On choisit , au hasard , n personnes âgées de plus de 60 ans
   a) Quelle est la probabilité pour qu'aucune d'entre elles ne soit vaccinées ?
   b) Déterminer la probabilité p_n pour que l'une au moins d'entre elles soit vaccinée .
   c) Déterminer la plus petite valeur de n pour que $p_n \geq 0,9$

Exercice 3

On considère les intégrales : $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx$ et $I = \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$.

1. Montrer que I peut s'écrire : $I = \int_0^{\pi} \cos x(\cos x - \cos x \sin^2 x) \, dx$
2. A l'aide d'une intégration par parties , montrer que $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - \frac{1}{3}J$.
3. Montrer de même que $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx - \frac{1}{3}I$.
4. montrer que : $I + J = \frac{3\pi}{4}$ et $J - I = 0$
5. En déduire les valeurs de I et J .

Exercice 4

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx \quad n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer I_0 et I_1
2. En intégrant deux fois par parties , établir une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2} . En déduire l'expression de I_n en fonction de n .
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \mathrm{I}_n < \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \, dx$
4. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

Exercice 5

On donne la suite : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. a. Montrer que la suite (I_n) est décroissante .
   b. En déduire que la suite (I_n) est convergente .
2. a. Calculer I_0
   b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$, pour $n \in \mathbb{N}$
   c. Déduire I_1
3. a. Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$
   b. Déterminer alors $\lim_{n \to +\infty} I_n$